

Cinematica del lancio del peso

Roberto De Luca
DIIMA - Università degli Studi di Salerno

1. Introduzione

Il problema dell'ottimizzazione del lancio del peso è stato già affrontato in passato, pensando al gesto atletico così come rappresentato nella fig. 1 [1, 2]. In queste trattazioni classiche i parametri da considerare sono: il modulo V_0 della velocità d'uscita dell'attrezzo, l'angolo θ che il braccio dell'atleta fa con l'orizzontale e l'altezza H dal quale viene scagliato il peso. Si può però anche notare che, così come schematicamente rappresentato in fig. 1, l'atleta imprime una velocità iniziale la cui direzione è, in buona approssimazione, lungo quella del braccio, nella sua una completa estensione, al momento del rilascio della palla.

Questa semplice osservazione ci fa capire che non ci si trova più davanti al caso elementare di un punto di lancio ad altezza fissata, dove cerchiamo di massimizzare la funzione di

stanza, calcolata dalla proiezione al suolo P' del punto P (vedi fig. 1), dal quale l'attrezzo viene lasciato, fino al punto nel quale il peso tocca terra. Nel caso del lancio del peso, infatti, notiamo che la lunghezza b del braccio dell'atleta contribuisce all'altezza H dal quale il peso viene lanciato, secondo la seguente relazione:

$$H = h + b \sin \theta \quad (1)$$

ove h , che possiamo assumere costante, è approssimativamente l'altezza della spalla dell'atleta rispetto al suolo. Quindi, si ha che H stessa dipende da uno dei parametri del problema e non può essere considerata una quantità costante. Secondo quanto detto, pertanto, vi è bisogno di una nuova analisi del problema, tenendo in considerazione solo le variabili θ e V_0 .

Affronteremo la risoluzione del problema, allora, in due fasi. Dapprima daremo un resoconto del lavoro classico svolto da Lichtenberg e Willis [1] e da Baće, Ilijić e Narančić [2]. Nella seconda parte rimuoveremo l'ipotesi che l'altezza sia una grandezza costante e cercheremo di cogliere le differenze tra i due approcci. Noteremo, infine, che il metodo classico risulta valido, in buona approssimazione, qualora si rimuova l'ipotesi che H è costante e si uti-

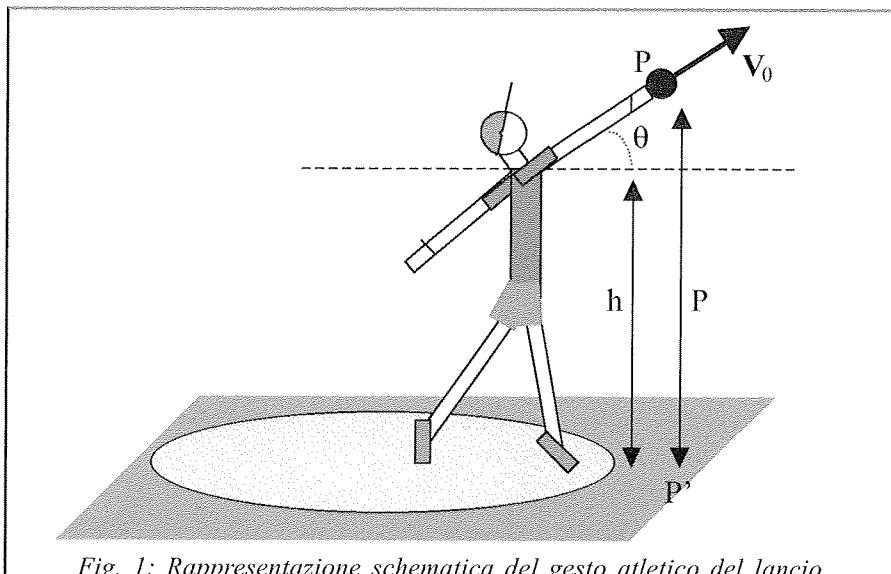


Fig. 1: Rappresentazione schematica del gesto atletico del lancio del peso. L'attrezzo viene rilasciato dall'atleta da un'altezza H e ad una direzione ad un angolo θ rispetto all'orizzontale.



lizzi la (1) come dipendenza funzionale di H da θ .

2. L'analisi classica del problema

Assumendo H costante, possiamo ricavare, per una data velocità V_0 , l'angolo ottimo θ^* per il quale il peso viene scagliato alla distanza massima dal punto P' . Consideriamo allora un punto materiale che viene scagliato da un'altezza H con una velocità, in modulo pari a V_0 , che forma un angolo θ con l'orizzontale. Possiamo scrivere l'equazione della traiettoria parabolica di questo punto materiale, trascurando la resistenza passiva dell'aria, come segue:

$$y = -\frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \theta} x^2 + \tan \theta \cdot x + H \quad (2)$$

ove l'origine degli assi cartesiani è fatta corrispondere con il punto P' sul suolo (vedi fig. 1).

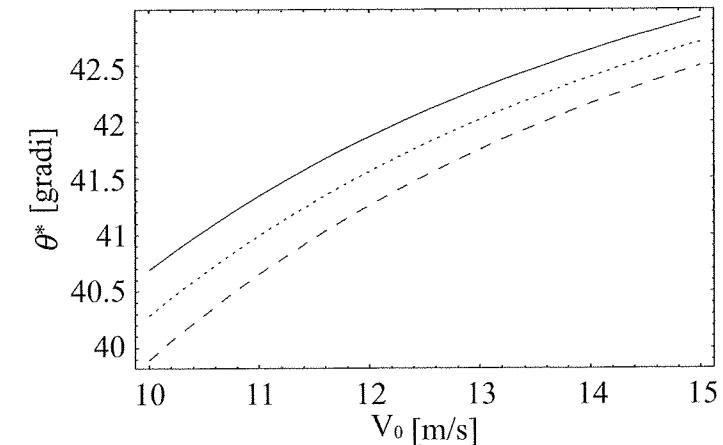


Fig. 2: Angolo ottimo per il lancio di un peso da tre altezze diverse (da sopra a sotto: $H=1.80$ m, $H=2.00$ m, $H=2.20$ m) in funzione della velocità iniziale V_0 .

Ponendo $y = 0$ si trova la distanza x_+ alla quale il peso tocca terra, cosicché

$$x_+ = \sin \theta \cos \theta \left(\frac{V_0^2}{g} \right) \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2gH}{V_0^2 \sin^2 \theta}} \right]. \quad (3)$$

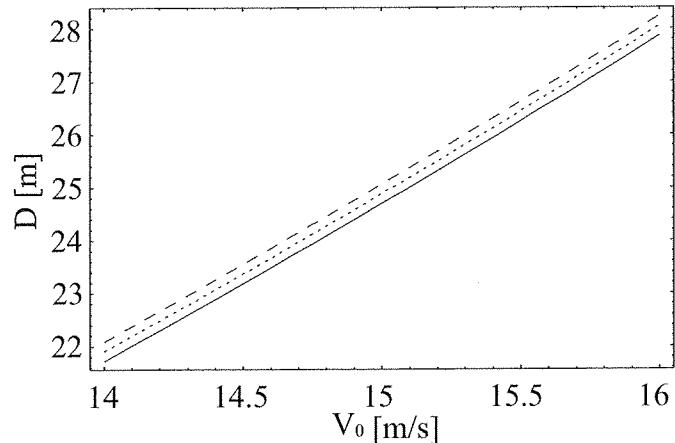


Fig. 3: Distanza massima, che un peso raggiunge se viene rilasciato da altezze diverse (da sotto a sopra: $H=1.80$ m, $H=2.00$ m, $H=2.20$ m), in funzione della velocità iniziale V_0 .

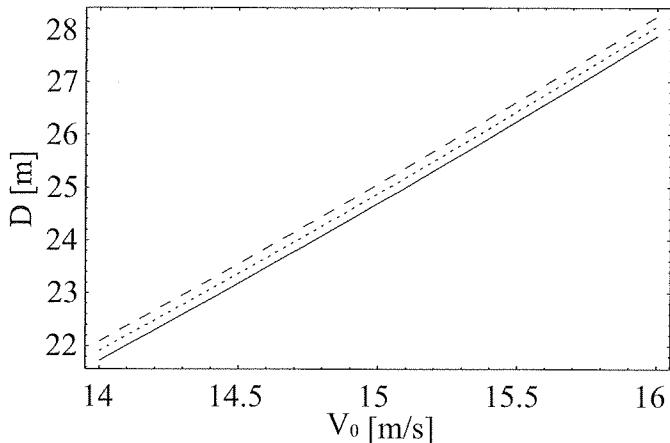


Fig. 4: Distanza massima, che un peso raggiunge se viene rilasciato con diversi valori del modulo V_0 della velocità (da sotto a sopra: $V_0 = 14.0$ m/s, $V_0 = 15.0$ m/s, $V_0 = 16.0$ m/s), in funzione dell'altezza H .

Massimizzando adesso la distanza x_+ rispetto all'angolo θ , nell'ipotesi che H non dipenda da θ , scriviamo:

$$\frac{dx_+}{d\theta} = \left(\frac{V_0^2}{2g} \right) \left\{ 2 \cos 2\theta \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2gH}{V_0^2 \sin^2 \theta}} \right] - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \left(1 + \frac{2gH}{V_0^2 \sqrt{1 + \frac{2gH}{V_0^2 \sin^2 \theta}}} \right) \right\} = 0. \quad (4)$$

Ponendo adesso $\alpha = \frac{gH}{V_0^2}$, e risolvendo per l'angolo θ , si ottiene l'angolo ottimo in questo caso: $\theta^* = \sin^{-1} \left[\sqrt{\frac{1}{2(\alpha+1)}} \right]$, (5)

Sostituendo infine la (5) nella (3) si ottiene la massima distanza $D = x_+(\theta)$ per un fissato valore di H :

$$D = \frac{\sqrt{2\alpha+1}}{\alpha} H. \quad (6)$$

In fig. 2 viene riportata la dipendenza esplicita di θ^* da V_0 per tre altezze diverse di rilascio dell'attrezzo: $H = 1.80$ m, 2.00 m, 2.20 m. In fig. 3, invece, viene riportata la dipendenza di D da V_0 per le stesse tre altezze. Dalla fig. 2 notiamo che, a parità di velocità nei lanci, gli angoli ottimi decrescono al crescere delle altezze. Dalla fig. 3 si nota inoltre che, a parità di velocità iniziale, i lanci che partono da altezze maggiori raggiungono distanze maggiori dal punto P' . Infine, si può notare che, risolvendo per il parametro α nella (5) e sostituendo nella (6), si ha [1] $D = H \tan(2\theta^*)$, che fornisce la dipendenza diretta della distanza massima dall'angolo ottimo nel caso in cui H è costante. La dipendenza di D da H viene riportata in fig. 4 per tre diversi valori del

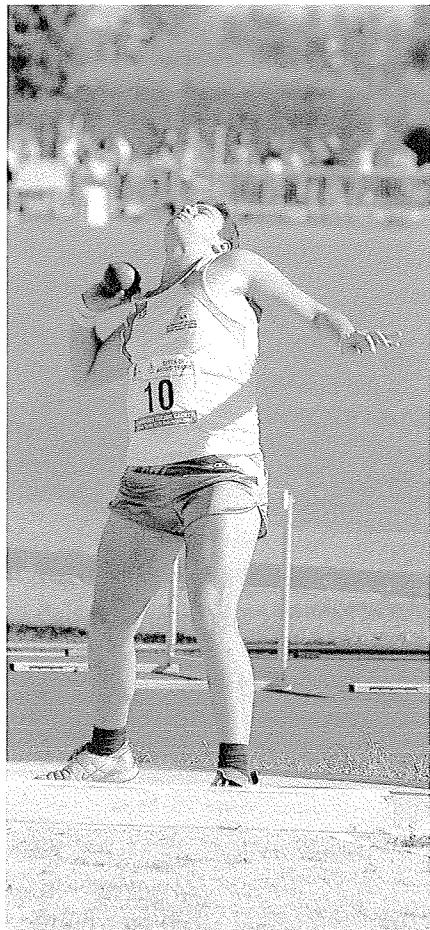
modulo della velocità iniziale. Nell'intervallo di altezze [1.6 m, 2.4 m] mostrato nella fig. 4 si nota che D cresce abbastanza lentamente con H .

3. Una nuova analisi del problema

Consideriamo adesso la traiettoria di un punto materiale che viene scagliato da un'altezza H , dipendente dall'angolo θ secondo la relazione data dalla (1), ovvero, prendiamo in esame il caso del lancio del peso da parte di un atleta per il quale fisseremo il rapporto

$$\beta = \frac{b}{h} = 0.5$$

(calcoli analoghi possono essere effettuati quando il parametro β viene adattato alla particolare conformazione fisica dell'atleta). La velocità di uscita del peso, in modulo pari a V_0 , forma lo stesso angolo θ con l'orizzontale del braccio teso dell'atleta al momento del rilascio del peso. L'equazione della traiettoria parabolica del punto materiale, trascurando la resistenza passiva dell'aria, e facendo corrispondere l'origine degli assi cartesiani con il punto P' sul suolo (vedi fig. 1), a cui faremo per semplicità corrispondere il punto iniziale della misura ufficiale della distanza, si scriverà ancora come la (2) e



l'ascissa del punto dove il peso va a cadere è ancora data dalla (3); la differenza sostanziale dal caso precedente, però, è che, questa volta, H dipende da θ come prescritto nella (1). Vedremo che questa dipendenza che renderà l'analisi del problema meno agevole, tanto da farci ricorrere a metodi di risoluzione numerica. Infatti, la condizione di massimo

$$\frac{dx_+}{d\theta} = 0,$$

che individua l'angolo ottimo θ_0 , si scriverà, ponendo

$$a = \frac{gh}{V_0^2},$$

come segue:

$$\cos 2\theta \sqrt{\sin^2 \theta + 2a(1 + \beta \sin \theta)} = 2\sin^3 \theta + 3a\beta \sin^2 \theta + (2a - 1)\sin \theta - a\beta. \quad (7)$$

L'equazione di sopra sfugge ad una soluzione analitica, in quanto equivale ad un'equazione algebrica di quinto grado, ma chiaramente ammette una soluzione per un angolo prossimo a $\frac{\pi}{4}$, così come si può arguire dalla fig. 5, dove riportiamo la distanza x_+ in funzione sia dell'angolo θ sia della velocità iniziale V_0 . Bisogna quindi percorrere una strada che ci fornisca almeno una soluzione approssimata.

Nella (7) allora poniamo $y = \sin \theta$ ed eleviamo entrambi i membri al quadrato, cosicché, ponendo $\beta = \frac{1}{2}$, avremo

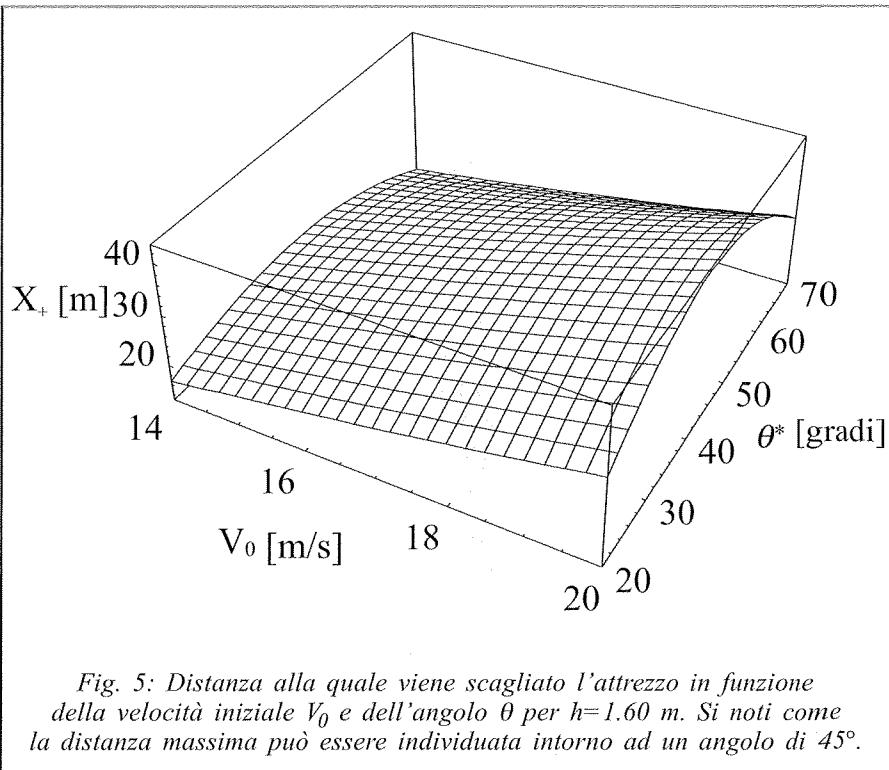
$$8y^5 + 9ay^4 + 4(6a - 1)y^3 + 2(5a + 8)y^2 - 8ay + a - 8 = 0. \quad (8)$$

Supponiamo adesso di poter sviluppare la soluzione in termini di a , scrivendo

$$y = y_0 + ay_1 + a^2 y_2 \quad (9)$$

e sostituiamo questa espressione nella (8), in modo da ottenere la seguente soluzione implicita per l'angolo ottimo θ_0 :

$$\sin \theta_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{33 + 8\sqrt{2}}{16(1 + 4\sqrt{2})}a + \frac{1064 + 753\sqrt{2}}{512(1 + 4\sqrt{2})}a^2. \quad (10)$$



In fig. 6 viene riportata la dipendenza dalla velocità iniziale, nell'intervallo [8, 20] m/s e per un valore di h pari a 1.60 m, dell'angolo ottimo θ_0 così come dato nella (10). Tale angolo ottimo è confrontato, nella stessa figura, con l'angolo ottimo θ^* determinato classicamente. Nella determinazione di θ^* , abbiamo utilizzato la (5), tenendo conto che θ^* appare sia al membro sinistro sia al membro destro.

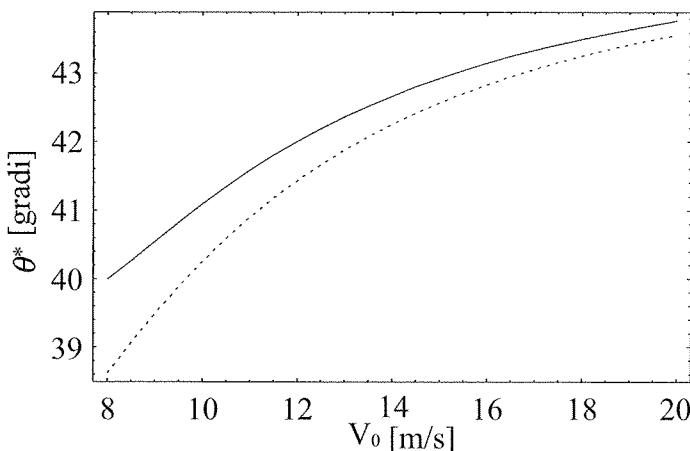


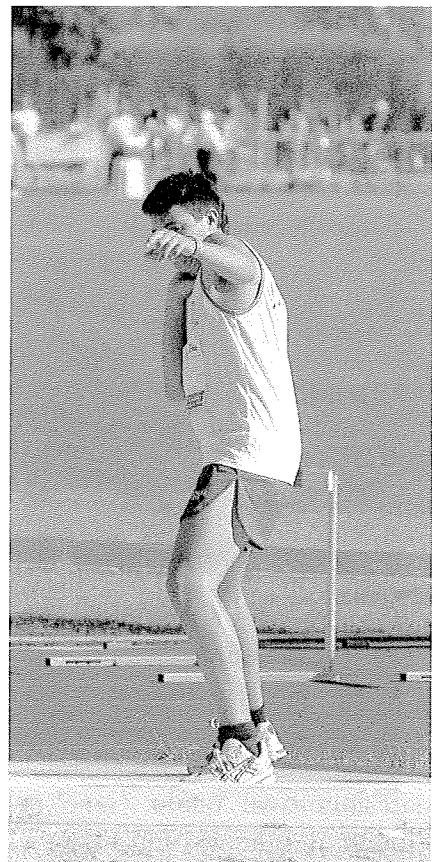
Fig. 6: Angolo ottimo θ_0 , per $h=1.60$ m, così come calcolato da un'analisi perturbativa al secondo ordine, in funzione della velocità iniziale V_0 (linea piena). La linea tratteggiata sta ad indicare la valutazione classica dell'angolo ottimo. Si noti come la determinazione classica sia sempre al di sotto, nell'intervallo considerato, della linea piena.

Ottenuta l'espressione per l'angolo ottimo θ_0 , possiamo calcolare l'espressione per la distanza massima D_0 , ponendo:

$$D_0 = \frac{\sin \theta_0 \cos \theta_0}{a} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{a(2 + \sin \theta_0)}{\sin^2 \theta_0}} \right] h. \quad (11)$$

Possiamo adesso confrontare questo risultato con la determinazione classica della distanza massima, così come data dalla (6), dove consideriamo l'altezza H non come una variabile indipendente, ma come una grandezza esprimibile in termini di θ^* come nella (1). In fig. 7a viene perciò riportata la distanza massima D_0 in funzione della velocità iniziale nell'intervallo [8, 20] m/s e per un valore di h pari a 1.60 m. In fig. 7b, invece, viene mostrata la differenza $\Delta D = D_0 - D$ tra le due diverse determinazioni della distanza massima. Dalla fig. 7a si nota che la distanza massima è una funzione crescente della velocità iniziale, così come era intuitibile. In fig. 7b otteniamo un risultato importante, che passiamo adesso a illustrare. Innanzitutto in fig. 7b si nota che le due diverse determinazioni delle distanze massime differiscono tra loro di una quantità dell'ordine di un millimetro. Questo significa che,

ai fini dell'ottimizzazione della distanza, se anche volessimo utilizzare i risultati della teoria classica del lancio del peso, otterremmo dei risultati molto vicini a quelli che si ottengono con un'analisi molto più laboriosa dal punto di vista del calcolo. Tuttavia, bisogna tener presente che la determinazione dell'angolo ottimo deve essere effettuata attraverso la risoluzione auto-consistente della (5), utilizzando la (1), e che non bisogna quindi considerare l'altezza H come un parametro indipendente del problema.



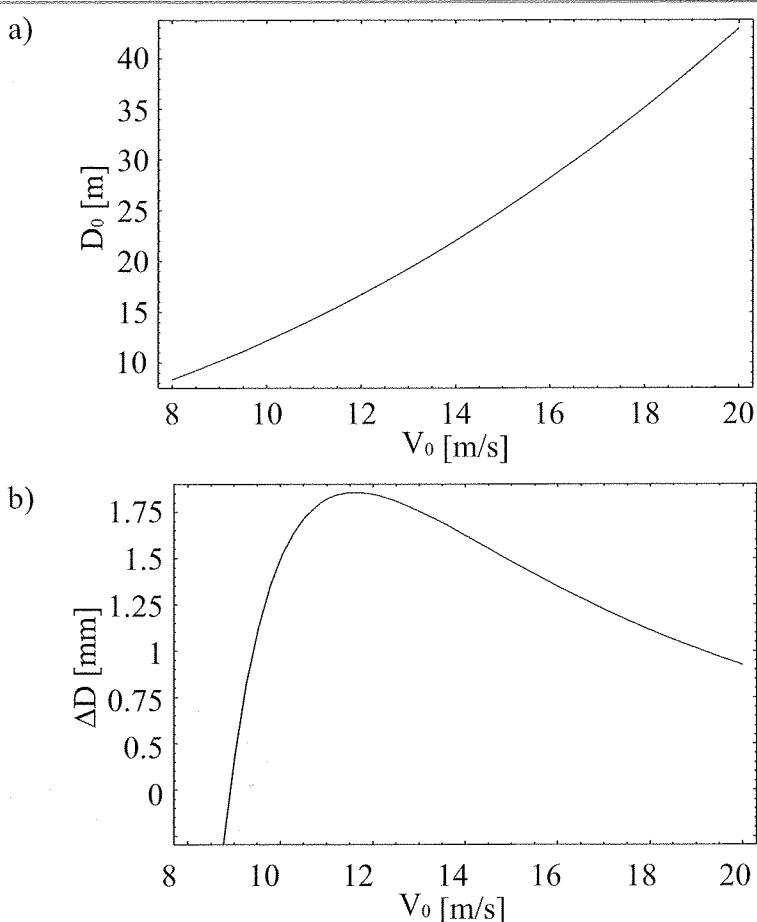


Fig. 7: a) Distanza massima D_0 , così come calcolata da un'analisi perturbativa al secondo ordine, in funzione della velocità iniziale V_0 .
 b) Differenza tra la distanza massima D_0 e la distanza massima D calcolata classicamente, in funzione della velocità iniziale V_0 .
 Per entrambe le figure $h=1.60$ m.

4. Conclusioni

Abbiamo analizzato la cinematica del lancio del peso, notando che l'altezza H dalla quale viene lanciato l'attrezzo non è una variabile indipendente del problema, in quanto essa dipende dall'angolo al quale viene inclinato il braccio dell'atleta al momento del rilascio del peso. Questa particolarità rende meno agevole la soluzione del problema dell'ottimizzazione del lancio, che non può più essere ottenuta per via analitica, così

come si fa quando si suppone che H non dipenda da θ . Una soluzione approssimata, ottenuta mediante uno sviluppo perturbativo al secondo ordine nel parametro $a = \frac{gh}{V_0^2}$, ove h sta ad indicare l'altezza della spalla dell'atleta, fissando la lunghezza del braccio $b = \frac{h}{2}$, ci fornisce l'angolo ottimo θ_0 in funzione della velocità V_0 di uscita dell'attrezzo e, per un dato valore di V_0 , ci dà la distanza

massima alla quale può essere scagliato il peso, immaginando di poter inclinare il braccio proprio all'angolo θ_0 . Si nota, tuttavia, che questa analisi potrebbe essere sostituita, ai fini della discussione dei risultati, anche dall'approccio classico, sempre che si rinunci a considerare H come un parametro indipendente del problema e si effettui, attraverso la formula classica, una determinazione auto-consistente dell'angolo ottimo. A differenza della trattazione classica, però, la presente analisi permette di analizzare, in modo corretto, l'espressione dell'angolo ottimo in termini della sola velocità iniziale V_0 . Infine, bisogna ricordare che la presente analisi non tiene conto di parametri di carattere medico-fisico che possano mettere in relazione V_0 con θ per un dato atleta. Quallora una relazione euristica tra queste due grandezze venisse ipotizzata per un dato atleta, l'analisi del problema, anche se presumibilmente più complessa, potrebbe portare ad una maggiore personalizzazione dei risultati.

Bibliografia

- [1] Lichtenberg, D.B., E Wilks, J.G. (1978) Maximizing the range of the shot put, *Am. J. Phys.*, 46, 546
- [2] Baće M., Ilijić S., Narančić Z. (2002) Maximizing the range of a projectile, *Eur. J. Phys.*, 23, 409

(Tratto da un lavoro accettato per la pubblicazione sul *Giornale di Fisica*, edito dalla Società Italiana di Fisica)