# III TABELLE - SCALE FUNZIONALI - GRAFICI - ABACHI

## III.1 Tabelle. Interpolazioni lineari

Spesso, effettuando delle rilevazioni di natura fisica, veniamo in possesso di dati i quali possono essere legati da una funzione matematica.

Questa funzione può essere a noi nota oppure no; nel caso che ne conoscessimo l'espressione analitica, questa potrebbe essere semplice oppure particolarmente complicata e quindi poco comoda.

Alcune volte risulta particolarmente pratico raccogliere i dati in forma semplice.

Consideriamo il caso in cui si conoscano alcune coppie di valori di una funzione, ma non la funzione stessa:

$$(x_1, y_1), (x_2, x_2), \ldots, (x_N, y_N)$$

il modo più pratico per scrivere i valori precedenti è quello di raccoglierli in una tabella che potrebbe assumere le forme delle Tab. III.1.1 e Tab. III.1.2.

| x | y |
|---|---|
| $x_1$ | $x_1$ |
| $y_2$ | $y_2$ |
| ... | ... |
| $x_N$ | $y_N$ |

*Tab. III.1.1*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | $x_1$ | $y_2$ | ... | $x_N$ |
| y | $x_1$ | $y_2$ | ... | $y_N$ |

*Tab. III.1.2*

Nel caso in cui volessimo trovare i valori di una nuova coppia compresa tra le precedenti, qualora i valori delle due coppie che comprendono quella incognita siano sufficientemente ravvicinati, potremo ottenerla con la semplice interpolazione lineare.

Chiamiamo con $(x_i, y_i)$, $(x_{i+1}, y_{i+1})$ ed $(x^*, y^*)$ rispettivamente i valori delle due coppie conosciute e della coppia della quale conosciamo, ad esempio $x^*$ e vogliamo ricavare $y^*$.

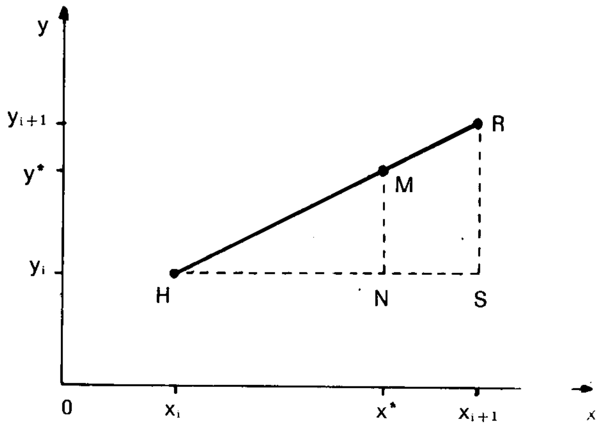


*Fig. III.1.1*

Dal diagramma di fig. III.1.1 considerando i triangoli simili HMN ed HRS, possiamo scrivere: HS : HN = RS : MN e quindi:

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{x^* - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{y^* - y_i} \qquad \text{(III.1.1)}$$

Dalla (III.1.1) si ricava immediatamente:

$$y^* = y_i + (y_{i+1} - y_i)\frac{x^* - x_i}{x_{i+1} - x_i} \qquad \text{(III.1.2)}$$

Un esempio numerico chiarirà meglio il procedimento.

Si pensi di aver rilevato in una prova di corsa di 150 m che un atleta abbia percorso i primi 50 m in 6,26 s ed i 100 m in 10,91 s.

Supponendo che la velocità in detto spazio sia rimasta praticamente costante (per cui possiamo applicare l'interpolazione lineare), ricaviamo il tempo del passaggio agli 80 m.

Possiamo tabulare semplicemente i valori dati nella Tab. III.1.2, ottenendo la Tab. III.1.3.

| x | 50 | 80 | 100 |
|---|---|---|---|
| y | 6,26 | $y^*$ | 10,91 |

*Tab. III.1.3*

e sostituirli nella (III.1.2) ottenendo:

$$y = 6{,}26 + (10{,}91 - 6{,}26)\frac{80 - 50}{100 - 50} = 6{,}26 + 4{,}65\frac{30}{50} = 6{,}26 + 2{,}79 =$$
$$= 9{,}05 \text{ s}$$

Questo tipo d'interpolazione alle differenze prime o lineari è in genere la più usata; per ottenere risultati più raffinati si possono fare delle interpolazioni con delle parabole di ordine tanto più elevato quanto più grande è il numero delle coppie rilevate a nostra disposizione.

Non riteniamo tuttavia sia questa la sede per trattare l'argomento.

Prima di concludere è opportuno illustrare un tipo di tabella idonea a raccogliere in forma organica i valori corrispondenti ad una funzione a due variabili, che possiamo scrivere semplicemente:

$$y = f\ (x, z) \qquad \text{(III.1.3)}$$

La tabulazione della funzione (III.1.3) può essere fatta nel modo della Tab. III.1.4.

| x \ z | $z_1$ | $z_2$ | ... | $z_N$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $y_{11}$ | $y_{12}$ | ... | $y_{1N}$ |
| $x_2$ | $y_{21}$ | $y_{22}$ | ... | $y_{2N}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| $x_N$ | $y_{N1}$ | $y_{N2}$ | ... | $y_{NN}$ |

*Tab. III.1.4*

## III.2 Scale funzionali

Quando di una funzione $y = f\ (x)$ conosciamo l'equazione analitica oppure un certo numero di coppie di valori, siamo in grado di darne la rappresentazione grafica, che talvolta si presenta molto comoda. Si può procedere nel modo seguente.

Si traccia una semiretta orizzontale, si prende un segmento u che rappresenti l'unità di misura della funzione (questa scelta va fatta in modo tale che tutti i valori della funzione cadano nel tratto di scala tracciato) e si riportano sulla semiretta a partire dall'origine 0 dei segmenti pari ad $u \cdot f\ (x_i)$.

Se abbiamo $x_N$ valori della variabile, dovremo riportare N valori di $u \cdot f(x_N)$.

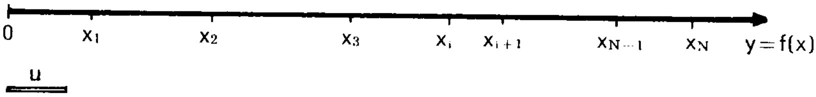


*Fig. III.2.1*

In corrispondenza degli estremi di ogni segmento scriveremo i valori $x_i$ delle variabili.

Il grafico di fig. III.2.1 si chiama scala funzionale della funzione $y = f(x)$ ed il segmento u è l'unità di lunghezza o il modulo della scala. Le scale funzionali più usate sono quella *metrica*, quella *logaritmica* e quella *percentuale.*

1. La scala metrica la si ottiene ponendo $f(x) = x$ e la si può osservare su un qualsiasi metro.

2. La scala logaritmica si basa sulla funzione $y = \log x$ ed è tracciata sul regolo calcolatore.

Considerati i logaritmi in base decimale, prendiamo la funzione $y = \log x$, essa vale anche nella forma $x = 10^y$.

Ora, se consideriamo i valori unitari di y a partire dallo 0, possiamo costruire la Tab. III.2.1:

| $y = \log x$ | x |
|---|---|
| 0 | $10^0 = 1$ |
| 1 | $10^1 = 10$ |
| 2 | $10^2 = 100$ |
| 3 | $10^3 = 1000$ |
| ... | ... |
| n | $10^n = 1\ldots$ (seguito da n 0) |

*Tab. III.2.1*

Dall'esame della Tab. III.2.1 appare chiaro che gli intervalli 1-10, 10-100, 100-1000, ecc. della scala delle y sono tutti identici; infatti i logaritmi di 6,25, 62,5 e 625 cambiano solo nella caratteristica e non nella mantissa, quindi su di una scala funzionale di tipo logaritmico è sufficiente spostarsi di una unità verso destra per passare progressivamente dal primo ai successivi (fig. III.2.2).

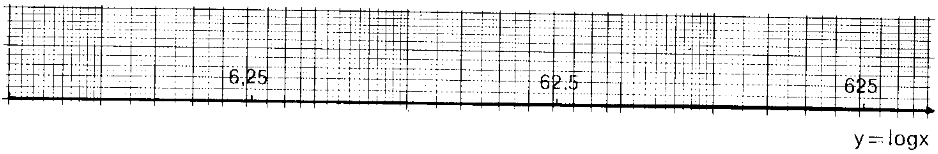


*Fig. III.2.2*

E' opportuno ricordare che nel caso fossimo in possesso di una scala logaritmica in una certa base, la possiamo usare anche in base differente, perché il cambiamento di base si effettua mediante una moltiplicazione per un fattore costante.

3. La scala percentuale si mostra di notevole utilità tutte le volte che si voglia graduare una grandezza riferendola ad un suo particolare campione.

Ad esempio immaginiamo di aver misurato la pressione ad un atleta dopo una corsa e di aver fatto varie rilevazioni ad intervalli costanti di tempo; il rapporto percentuale tra le diverse pressioni e quella massima rilevata:

$$x\% = \frac{p_i}{p_M} \cdot 100$$

attribuirà a ciascuna di esse un valore compreso tra 1 e 100 che fornirà la sua misura nella scala funzionale percentuale (fig. III.2.3).

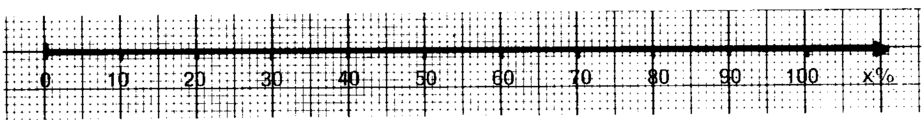


*Fig. III.2.3*

E' chiaro che detta scala avrà valori percentuali maggiori di 100 tutte le volte che il campione di riferimento non sia la massima delle misure effettuate sulla grandezza in esame.

## III.3 Grafici cartesiani. Abachi cartesiani

La rappresentazione di una funzione $y = f(x)$ su di un grafico cartesiano non presenta difficoltà particolari.

Infatti un grafico cartesiano presenta due scale funzionali (una per la variabile x, l'altra per la funzione y) perpendicolari tra di loro come in fig. III.3.1.

In genere le scale delle ascisse x e delle ordinate y sono di tipo metrico o di tipo logaritmico. Quest'ultima soluzione viene adottata convenientemente tutte le volte che la funzione y sia di tipo esponenziale:

$$y = Y \cdot e^x \qquad \text{(III.3.1)}$$

Il logaritmo decimale della (III.3.1) è:

$$\log y = \log Y + x \cdot \log e \qquad \text{(III.3.2)}$$

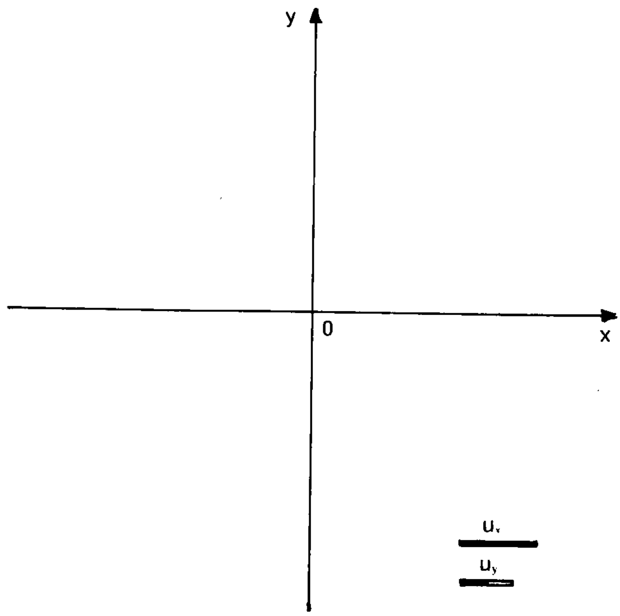


*Fig. III.3.1*

Dalla (III.3.2) si vede che adottando una scala metrica per la x ed una logaritmica per la y, questa sul relativo diagramma cartesiano è una retta, in quanto sia log Y che log e sono due costanti e quindi la sua rappresentazione grafica è la più semplice possibile.

Questo diagramma si chiama semilogaritmico avendo una sola scala di questo tipo.

Un diagramma logaritmico (con tutte e due le scale di questo tipo) lo si ottiene da una funzione come la seguente:

$$y = Yx^n \qquad \text{(III.3.3)}$$

Infatti il logaritmo della (III.3.3) è:

$$\log y = \log Y + n \cdot \log x \qquad \text{(III.3.4)}$$

Adottando scale logaritmiche sia per la x che per la y, la funzione (III.3.3) si rappresenta con una retta di comoda utilizzazione. Si ricorda infatti, che per tracciare una retta è sufficiente individuarne due punti soltanto, al contrario una funzione del tipo (III.3.1) e (III.3.3) necessita di molti punti per essere tracciata con sufficiente precisione.

Un esempio grafico illustrerà i vantaggi.

Consideriamo l'iperbole equilatera:

$$x \cdot y = 10 \qquad \text{(III.3.5)}$$

il suo logaritmo è:

$$\log y = \log 10 - \log x = 1 - \log x$$

che risulta chiaramente una retta.

Infatti, con riferimento ai soli valori di x ed y maggiori di 1, rappresentiamola su due grafici cartesiani, rispettivamente a scala metrica (fig. III.3.2) ed a scala logaritmica (fig. III.3.3).

Per tracciare il diagramma cartesiano a scale metriche è necessario costruire la Tab. III.3.1 e ricavare le coordinate di più punti, mentre per il diagramma a scale logaritmiche è sufficiente tracciare il segmento che unisce due punti della funzione, essendo questa, in scala logaritmica, una semplice retta.

| x | 1 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 10 | 5 | 5/2 | 5/3 | 5/4 | 1 |

*Tab. III.3.1*

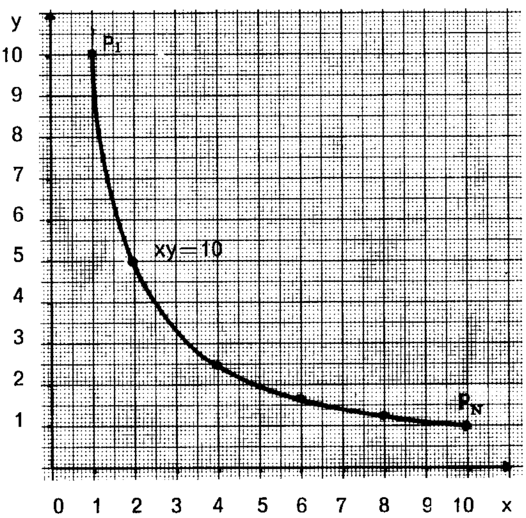


*Fig. III.3.2*

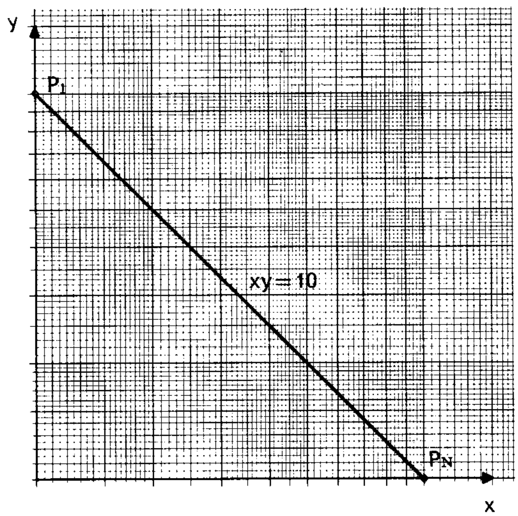


*Fig. III.3.3*

Riprendiamo l'esempio dell'iperbole equilatera, sempre con riferimento ai soli valori di x ed y maggiori di 1; consideriamo altri due valori della costante iperbolica, ad esempio: 6 e 8 e procediamo a tracciare il diagramma cartesiano con scale metriche.

Si vede dalla fig. III.3.4 come la sua tracciatura per punti comporti un lungo lavoro.

Al contrario se usiamo un abaco di tipo logaritmico, la famiglia di iperboli precedenti si trasforma in una famiglia di rette parallele. E' sufficiente trovare due punti di una retta per tracciarla e poi soltanto un punto delle altre, in quanto esse sono parallele alla prima.

La fig. III.3.5 mostra l'abaco logaritmico delle suddette iperboli.

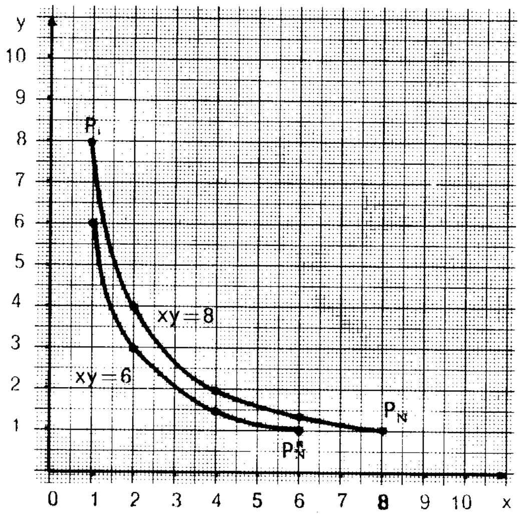


*Fig. III.3.4*

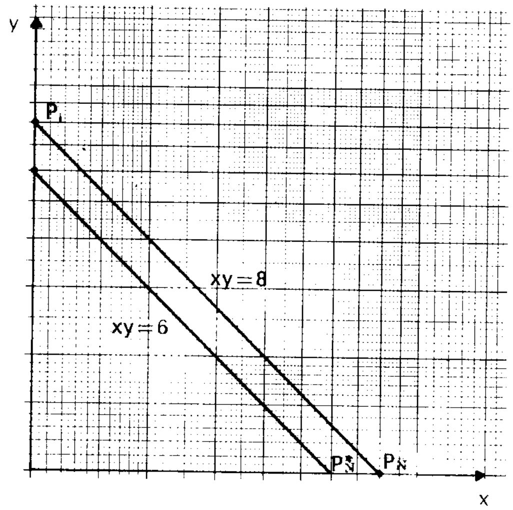


*Fig. III.3.5*

## III.4 Grafici a rettangoli e grafici circolari

A seconda dello scopo per il quale si traccia un grafico, sovente ed in special modo in statistica vengono usati dei grafici, detti *grafici*

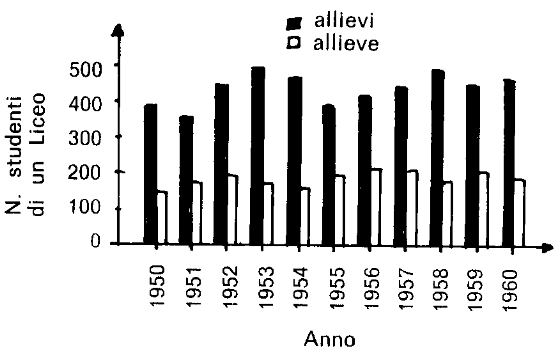


*Fig. III.4.1*

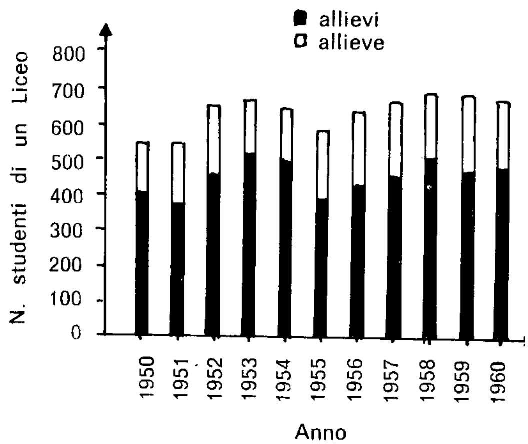


*Fig. III.4.2*

*a rettangoli*, dove le coppie (x, y) di una distribuzione di frequenze non sono individuate dai punti di un piano cartesiano, ma da rettangoli che hanno al centro della base il valore della variabile indipendente x e l'altezza proporzionale al valore della y. Le fig. III.4.1, fig. III.4.2 e fig. III.4.3 illustrano tre tipi di grafici a rettangoli.

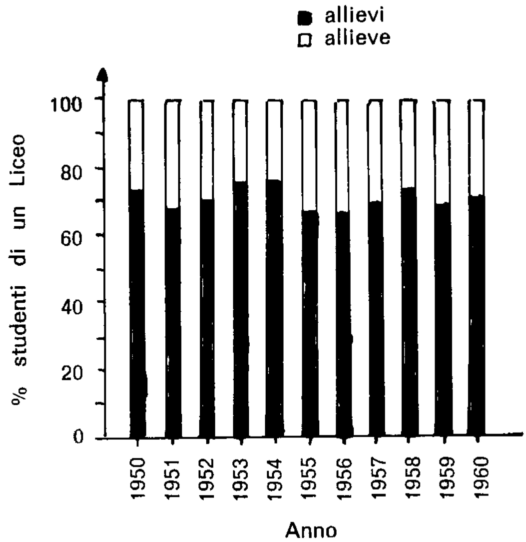


*Fig. III.4.3*

Un diverso modo di rappresentare una distribuzione di frequenze può essere quella dei *diagrammi circolari*. La fig. III.4.4 illustra chiaramente il metodo e non ha bisogno di ulteriori indicazioni.

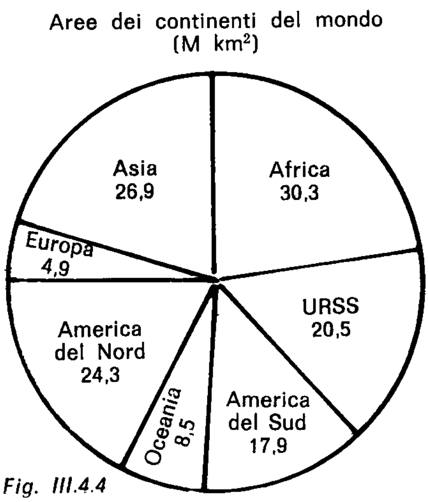


*Fig. III.4.4*

BIBLIOGRAFIA

1) M. Fazio: Manuale delle unità di misura. ISEDI, Milano 1976.
2) CNR-UNI 10003-74. Sistema Internazionale di unità (SI), Milano 1974.
3) Gazzetta Ufficiale della Comunità Europea, 29-10-71.